Loi du déplacement de Wien

① On rappelle la loi de Planck :
la densité d'énergie par unité de volume
par intervalle de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$,
à la température T est

$$u_T(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)}$$

On cherche $\omega = \omega_{max}$ pour laquelle $\omega \mapsto u_T(\omega)$
est maximale. On fait le changement de variable

$$\omega \mapsto x = \frac{\hbar \omega}{kT} \iff \omega = \frac{kTx}{\hbar}$$

$$u_T(x) = \frac{\hbar (kT)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right)$$

Donc $\frac{du_T}{dx} = 0 \iff 3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x = 0$

$$\iff 3\left(1 - e^{-x}\right) = x \qquad (*)$$

Pour résoudre approximativement cette équation (✱)

on pose $x = 3 - \varepsilon$ et on suppose $|\varepsilon| \ll 1$.

$$(*) \iff 3\left(1 - e^{-3} e^{\varepsilon}\right) = 3 - \varepsilon$$

$$\iff -3e^{-3}\left(1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)\right) = -\varepsilon$$

$$\iff \varepsilon\left(1 - 3e^{-3}\right) \approx 3e^{-3}$$

$$\iff \varepsilon = \frac{3e^{-3}}{1-3e^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}e^{3} - 1} \approx 0.17$$

Donc $x \approx 3 - \varepsilon \approx 2.82$

$$\omega_{max} = x \frac{kT}{\hbar} = \alpha T,$$

$$\alpha = x\frac{k}{\hbar} \approx \frac{2.82 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \, 2\pi}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 3{,}7 \cdot 10^{11} \; K^{-1} s^{-1}$$

Utilité de cette loi : en observant ω_{max} (couleur apparente) on déduit la température T de l'objet ou de l'étoile.

② On a $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

changement de variable non linéaire

donc loi de Planck : $d\omega = 2\pi c \frac{d\lambda}{\lambda^2}$

$$v_T(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)} = \frac{\hbar (2\pi c)^3 \, d\lambda}{\pi^2 c^3 \lambda^{3+2} \left(e^{\frac{\hbar 2\pi c}{kT\lambda}} - 1\right)}$$

densité d'énergie en ω

$$= \tilde{v}_T(\lambda) \, d\lambda$$

densité d'énergie en λ

On pose $x = \frac{\hbar 2\pi c}{kT\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\hbar 2\pi c}{kTx}$

alors $\tilde{v}_T(\lambda) = C \dfrac{x^5}{(e^x - 1)}$

constante

$\lambda \mapsto \tilde{v}_T(\lambda)$ maximal $\Leftrightarrow \frac{d\tilde{v}_T}{dx} = 0 \Leftrightarrow 5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x = 0$

$\Leftrightarrow 5(1 - e^{-x}) = x$. De même, on pose $x = 5 - \varepsilon$

donnant $\varepsilon = \dfrac{1}{\frac{1}{5}e^5 - 1} \simeq 0.034$

solution

$$\tilde{x} = 5 - \varepsilon \simeq 4.96$$

$$\tilde{\lambda}_{max} = \frac{\hbar\, 2\pi c}{k T \tilde{x}} = \left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 4{,}96}\right) \frac{1}{T}$$

$$\simeq \left(3 \cdot 10^{-3}\ m\,K\right) \frac{1}{T}$$

or $\lambda_{max} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{max}} = \dfrac{\hbar\, 2\pi c}{k T x}$

donc $\tilde{\lambda}_{max} = \left(\dfrac{x}{\tilde{x}}\right) \lambda_{max} \approx \left(\dfrac{2.82}{4.96}\right) \lambda_{max}$

$$\approx 0.56\ \lambda_{max}$$

(3) Pour le Soleil, $T = 6000\,K$,

$\tilde{\lambda}_{max} = 0.48\ 10^{-6}\,m$: "bleu"

$\lambda_{max} = 0.86\ 10^{-6}\,m$: "rouge"

Le choix entre λ_{max} et $\tilde{\lambda}_{max}$ est arbitraire. Ce qui détermine la couleur apparente du Soleil va être la fonction de réponse de nos cellules visuelles.